

Title	水平振動円筒容器内の水面波模様
Sub Title	The wave patterns on the surface of water in a horizontally vibrated circular cylinder
Author	田脇, 翔太(Tawaki, Shota) 竹下, 有節(Takeshita, Yusetsu) 下村, 裕(Shimomura, Yutaka)
Publisher	慶應義塾大学日吉紀要刊行委員会
Publication year	2012
Jtitle	慶應義塾大学日吉紀要. 自然科学 (The Hiyoshi review of the natural science). No.52 (2012. 9) ,p.69- 78
Abstract	The wave patterns are observed on the surface of water in a horizontally vibrated circular cylinder. They are compared with the results from the linear theory of water waves.
Notes	研究ノート
Genre	Departmental Bulletin Paper
URL	http://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN10079809-20120930-0069

水平振動円筒容器内の水面波模様

田脇翔太*・竹下有節**・下村 裕***

The Wave Patterns on the Surface of Water in a Horizontally Vibrated Circular Cylinder

Shota TAWAKI, Yusetsu TAKESHITA and Yutaka SHIMOMURA

Summary—The wave patterns are observed on the surface of water in a horizontally vibrated circular cylinder. They are compared with the results from the linear theory of water waves.

1. はじめに

中国において古くから伝わる噴水魚洗という容器がある。この容器に水を入れ、その取っ手部分を手で擦ると、一定の場所から噴水する。¹⁾ 本研究では、円筒形の容器を水平振動させても同じような現象が起こることを確認した。なお、クント管に関する実験でも噴水が観測されているが、²⁾ この現象と同じメカニズムかどうかは定かでない。

本研究ノートでは、円筒容器を水平振動させた場合に観られる水面波について報告する。また、この現象は実際には非線形波であると思われるが、線形波として見たときに理論的に導かれる結果と実験によって観測される水面波模様³⁾を比較する。

* 慶應義塾大学法学部政治学科4年

** 慶應義塾大学法学部法律学科4年

*** 慶應義塾大学法学部 日吉物理教室 (〒223-8521 横浜市港北区日吉4-1-1) : Department of Physics, Hiyoshi Campus, Faculty of Law, 4-1-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa 223-8521, Japan. [Received April. 11, 2012]

2. 実験方法

以下の要領で実験を行った。

2-1. 実験の目的

円筒容器を水平振動させた際の水波の発生を観察する。

2-2. 実験の器具と材料

ハンディー低周波発振器 CR-T (ナリカ (株) 製作) : 図 1

バイブレーター励振器 FB-8N (ナリカ (株) 製作) : 図 2

円筒容器 (ホーロー材質, 半径0.09m, 高さ0.15m) : 図 3
スタンド

釣り糸 (ナイロン材質)

2-3. 実験方法

- ① 図 4 のように実験器具を設置する。
- ② 励振器の振動部と円筒容器を水平に釣り糸で繋げる。
- ③ 円筒容器に水を入れる。
- ④ 発振器を作動させ、周波数を変化させる。
- ⑤ 周波数の変化による水波の変化を撮影する。

3. 実験結果

実験を2012年1月18日(水)に行った。当日の天気は晴れ、気温は7.5℃、気圧は1017.1hPaで湿度は55%であった。発振器の振動数を変化させたところ、75Hzの時と150Hzの時に際立った水面波模様が見られ、しかも4か所から噴水が発生した。図5, 6は実験での水面波の模様である。赤い破線で囲った部分において噴水を確認した。



図 1. 低周波発振器



図 2. 励振器



図 3. 円筒容器

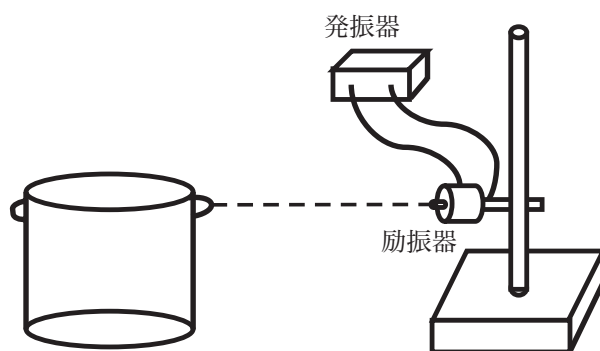


図4．実験概要図



図5．75Hzで水平加振したときの水面波模様（赤い破線で囲った部分は噴水箇所）

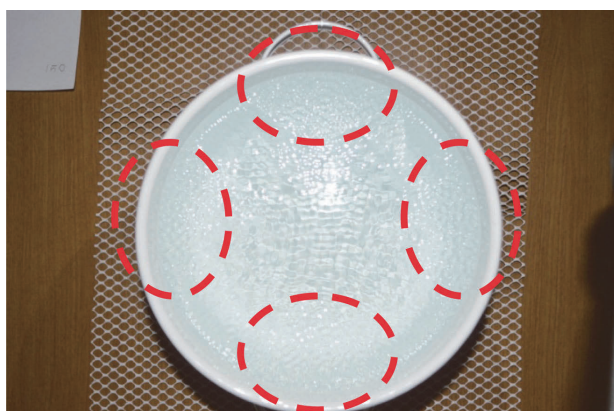


図6．150Hzで水平加振したときの水面波模様（赤い破線で囲った部分は噴水箇所）

4. 線形波理論

本節では水面波の振幅がその波長に比べて十分小さい場合を理論的に考察する。実験で観察された円筒容器内の水面波はこの条件を満足しているか不明であるが、造波器による線形波の理論⁴⁾を応用し、水平振動円筒容器内の線形波の表現を導出する。そして、その表現から線形水面波を計算し、実験結果と比較する。

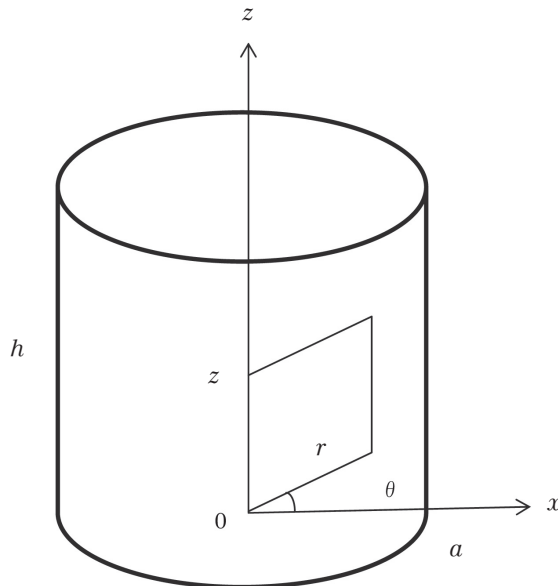


図7. 円筒容器と円柱座標 (r, θ, z)

図7に示された円柱座標を用い、次の記号を導入する。

水深： h ，平衡水面： $z=h$ ，底面： $z=0$ ，円柱の半径： $r=a$ ，水面変位： η ，重力加速度： g
速度ポテンシャル： ϕ

以下に線形波理論を記述する。

$$\text{基礎方程式：}\Delta\phi=0 \quad \cdots\text{①}$$

$$\text{境界条件：}\frac{\partial\phi}{\partial t}+g\eta=0 \quad (z=h) \quad \cdots\text{②}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\partial\eta}{\partial t} \quad (z=h) \quad \cdots\text{③}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \quad (z=0) \quad \cdots\text{④}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}=\zeta(z)\cos n\theta\cos\omega t \quad (r=a) \quad \cdots\text{⑤}$$

$$\text{定常波解: } \phi(r, \theta, z, t) = f(r)g(z) \cos n\theta \cos \omega t \quad \cdots \textcircled{6}$$

ここで、容器内弾性波の速さを c とすると、

$$c = f\lambda = \frac{\omega}{2\pi} \frac{2\pi a}{n} = \frac{\omega a}{n}$$

なので、

$$\omega = \frac{c}{a} n \quad \cdots \textcircled{7}$$

⑥を①に代入：

$$\frac{f'' + f'/r}{f} - \frac{n^2}{r^2} + \frac{g''}{g} = 0 \quad \cdots \textcircled{8}$$

よって

$$\frac{f'' + f'/r}{f} - \frac{n^2}{r^2} = -\frac{g''}{g} = k_m^2 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad \cdots \textcircled{9}$$

ここで k_m は実数である。

(k_m を純虚数とすると、下記⑫に対応する条件式が $k_m h \tanh k_m h = \omega^2 h/g$ となり、これを満たす k_m は一意に決まるため⑤を満たす一般解を構成できない。)

$g(z)$ は④を満たす関数として

$$g(z) = \alpha_m \cos k_m z \quad \cdots \textcircled{10}$$

ここで②, ③より

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad (z=h) \quad \cdots \textcircled{11}$$

したがって、⑥, ⑩より

$$-\omega^2 - g k_m \tan k_m h = 0$$

つまり

$$k_m h \tan k_m h = -\frac{h\omega^2}{g} \quad \cdots \textcircled{12}$$

$f(r)$ は、

$$x = k_m r \quad \cdots \textcircled{13}$$

として

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2}\right) f = 0 \quad \cdots \textcircled{14}$$

を満たす。これは変形ベッセル方程式であるので、独立な二つの解として変形ベッセル関数 $I_n(x), K_n(x)$

が存在する。しかし、 $K_n(x)$ は原点で発散するので、

$$f(r) = I_n(x) = I_n(k_m r) \quad \cdots \textcircled{15}$$

よって、⑥, ⑩, ⑮より一般解は、

$$\phi(r, \theta, z, t) = \cos n\theta \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m I_n(k_m r) \cos k_m z \quad \cdots (16)$$

よって境界条件⑤より,

$$\zeta(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m I'_n(k_m a) \cos k_m z \quad \cdots (17)$$

ここで

$$\int_0^h dz \cos k_i z \cos k_m z = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2k_i h}{2k_i} + h \right) \delta_{im} \quad \cdots (18)$$

なので,

$$\alpha_m = \frac{2}{k_m I'_n(k_m a)} \left(\frac{\sin 2k_m h}{2k_m} + h \right)^{-1} \int_0^h dz \zeta(z) \cos k_m z \quad \cdots (19)$$

ここで

$$I'_n(x) = \frac{1}{2} (I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)) \quad \cdots (20)$$

より,

$$\alpha_m = \frac{4}{k_m \{I_{n-1}(k_m a) + I_{n+1}(k_m a)\}} \left(\frac{\sin 2k_m h}{2k_m} + h \right)^{-1} \int_0^h dz \zeta(z) \cos k_m z \quad \cdots (21)$$

以上より, ⑫, ⑬, ⑭が一般解を与える。このとき, ②より

$$\eta(r, \theta, t) = \frac{\omega}{g} \cos n\theta \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m I_n(k_m r) \cos k_m h \quad \cdots (22)$$

ここでは, $\zeta(z) = \sigma z$ と仮定する。その場合,

$$\begin{aligned} \int_0^h dz \zeta(z) \cos k_m z &= \frac{\sigma}{k_m} \left(h \sin k_m h + \frac{\cos k_m h}{k_m} \right) \\ &= \frac{\sigma \cos k_m h}{k_m^2} (k_m h \tan k_m h + 1) = \frac{\sigma \cos k_m h}{k_m^2} \left(1 - \frac{h\omega^2}{g} \right) \quad \cdots (23) \end{aligned}$$

なので,

$$\alpha_m = \frac{4 \sigma \cos k_m h}{k_m^3 \{I_{n-1}(k_m a) + I_{n+1}(k_m a)\}} \left(\frac{\sin 2k_m h}{2k_m} + h \right)^{-1} \left(1 - \frac{h\omega^2}{g} \right) \quad \cdots (24)$$

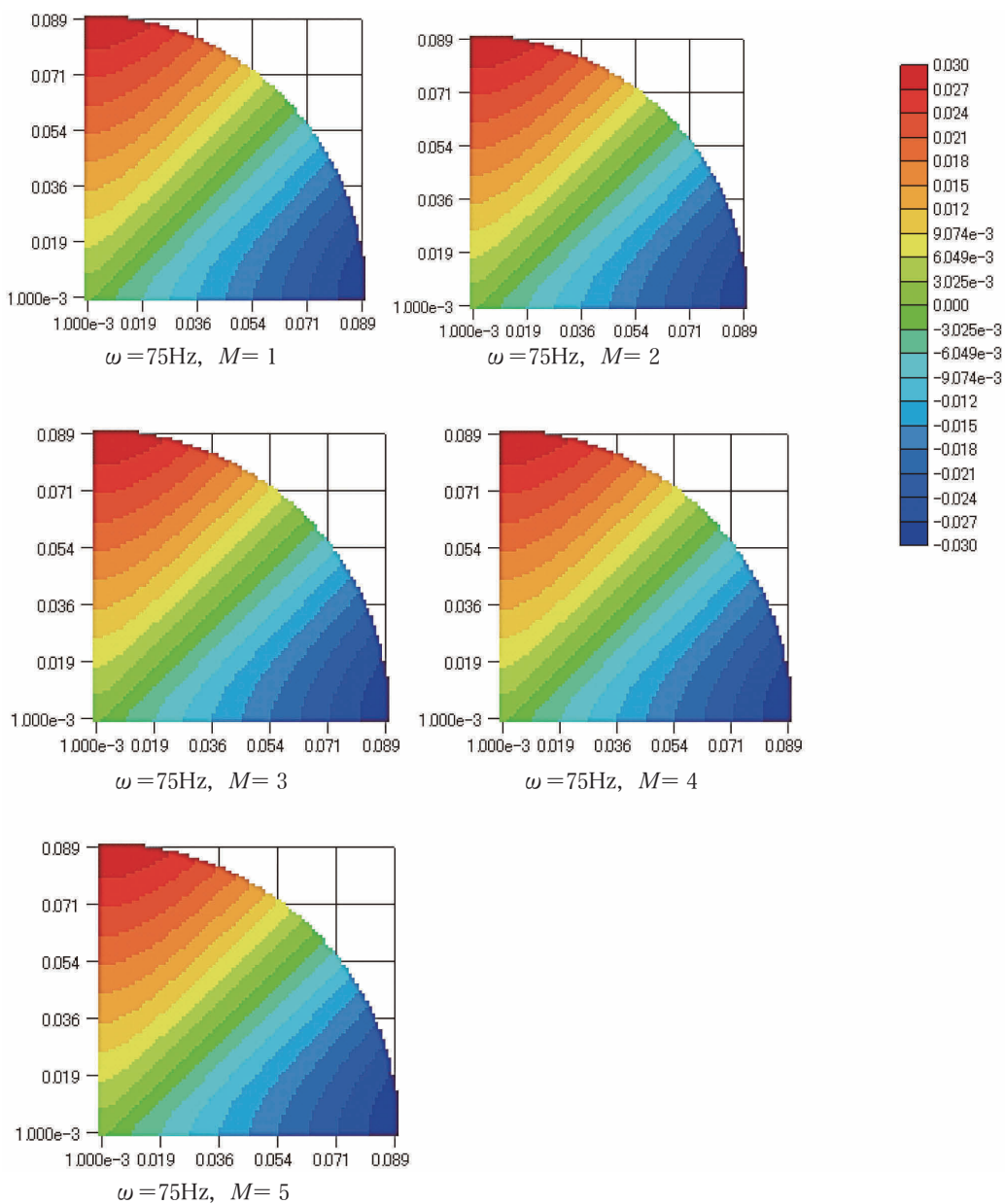
ここでは, 上記 $\zeta(z) = \sigma z$ のとき, 実験で計測した値を参考にして,

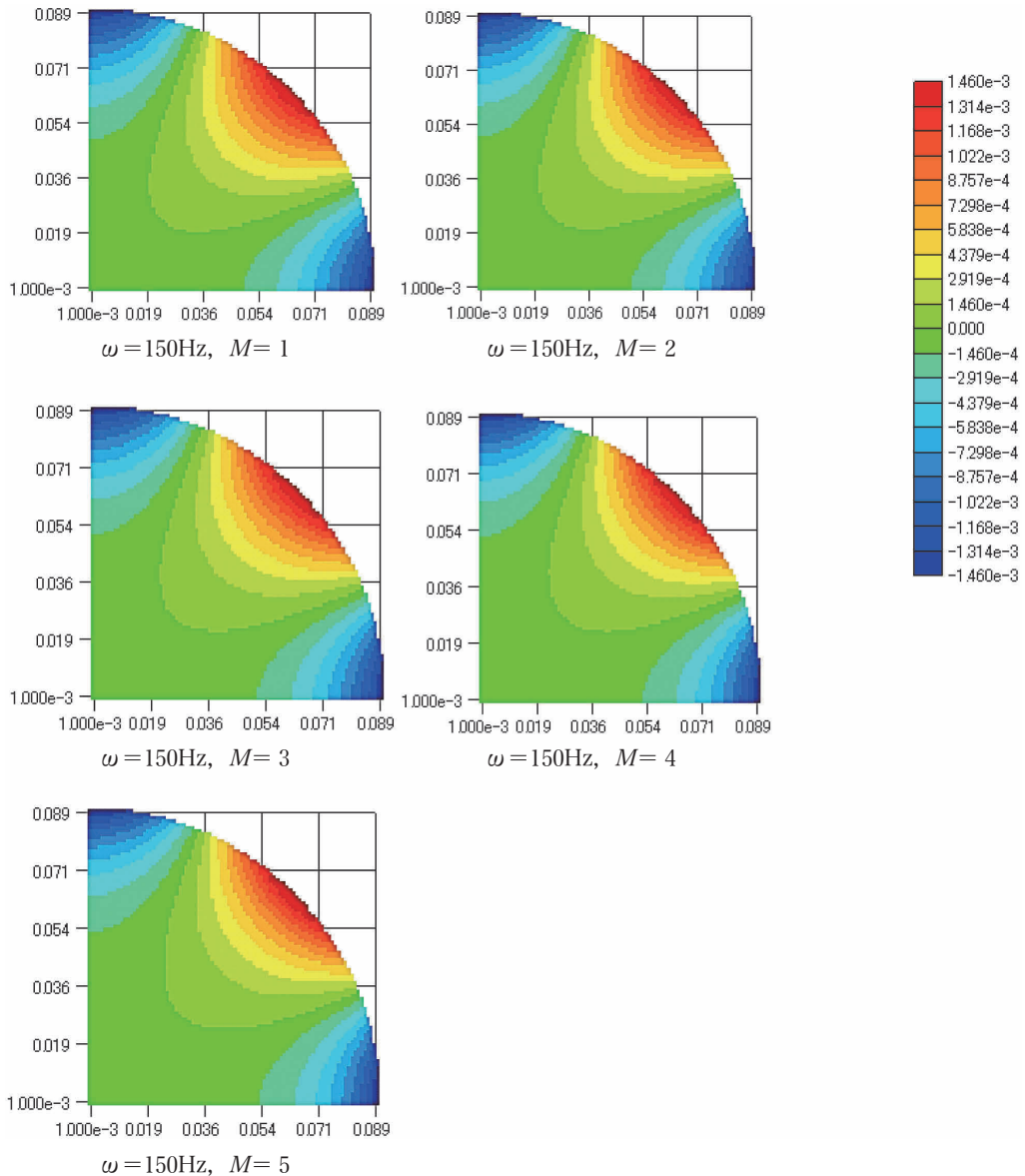
$$\psi(r, \theta) = \eta(r, \theta, t) / (\sigma \sin \omega t) = \frac{\omega}{g} \cos n\theta \sum_{m=1}^M \frac{\alpha_m}{\sigma} I_n(k_m r) \cos k_m h \quad \cdots (25)$$

を, $n=2$ ($\omega=75\text{Hz}$), $n=4$ ($\omega=150\text{Hz}$) の場合を考える。パラメータを $g=9.8\text{m/s}^2$, $a=0.09\text{m}$, $c=3.375\text{m/s}$, $h=0.15\text{m}$ とする。また, 理論上 M は無限大とすべきであるが, 実際の計算では $M=1 \sim 5$ としてそれぞれを描いた結果が図 8 と図 9 に示されている。波模様

表 1. ⑦と⑫によって決まる, $n=2, 4$, $m=1 \sim 5$ に対する $k_m h$ の値

	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$n=2$	1.575	4.726	7.877	11.028	14.178
$n=4$	1.572	4.716	7.860	11.004	14.147

図 8. 線形水面波振幅の等高線 ($\omega = 75\text{Hz}$, $M = 1 \sim 5$)

図9. 線形水面波振幅の等高線 ($\omega = 150\text{Hz}$, $M = 1 \sim 5$)

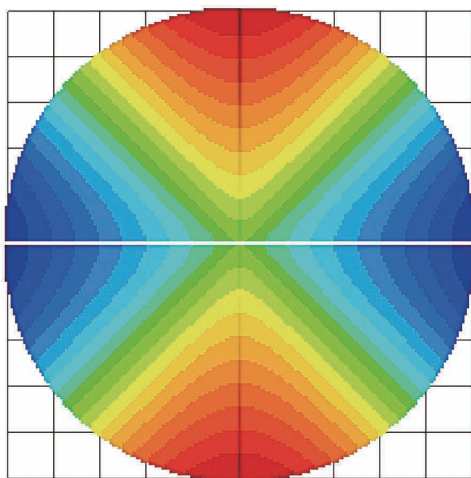
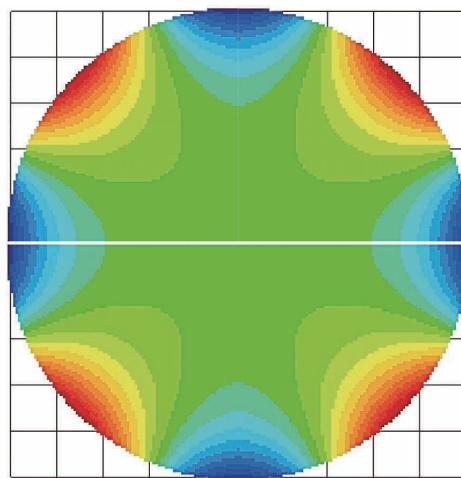
は対称性があるので、第1象限のみが図示されている。なお、⑦と⑫によって決まる $k_m h$ は、ニュートン法によって表1のように数値的に求められた。

図8と図9において M による変化はあまり観られないので、級数⑮は収束性が良く、 $M=5$ としても $M=\infty$ の十分良い近似を与えることがわかる。定常波の腹は、いずれも円筒容器壁にある。これは、容器の外側にいくにつれて大きく水面が振動することを示しており、噴水が発生しやすい箇所であると思われる。

5. 理論と実験の比較

4. では線形波理論による結果を表示した。それらを対称性によって全円形表面に描き直すと図10, 11となる。5. の実験結果と比較するため, 図5, 6を対応する下部に再掲した。

壁付近で噴水が生じる傾向は線形波理論と実験で一致している。図10と図5に示されているように, $\omega=75\text{Hz}$ に対しては, 波模様も定性的には類似しているように観え, 定常波の腹の数についても双方4であることは合致している。しかしながら, 図11と図6に観られるように, $\omega=150\text{Hz}$ に対しては, 定常波の腹の数が理論では8, 実験では4であり, 整合しない。この原因は不明であるが, この場合については線形理論の近似が妥当性を失うのかもしれない。

図10. $\omega=75\text{Hz}$, $M=5$ 図11. $\omega=150\text{Hz}$, $M=5$ 

【再掲】図5. 75Hz



【再掲】図6. 150Hz

6. おわりに

本研究では、円筒容器を水平振動させた場合に観られるその内部の水面波について調べた。

この現象は実際には非線形波であると思われるが、本研究では、これを線形波として理論的に導かれる結果と、実験によって観測される水面波模様を比較した。その結果、75Hzの振動数の場合は双方が類似しているという結果を得た。しかし、150Hzの振動数の場合は、定常波の腹の数に相違が認められた。また、いずれの場合も定量的比較や噴水現象の説明はできていない。

腹の数が2 ($n=1$) と6 ($n=3$) の定常水面波がどうして観測できないのか、噴水箇所が4か所に限られるのはなぜか、振動の方向や円筒容器の材質は水面波模様や噴水現象に対してどのように関係しているのかなど、未だ不明な点が多い。今後の研究課題である。

参考文献

- 1) 鈴木廣志, 松田修三, 許煥章, 曹公益: 「噴水魚洗の水滴飛び出し現象の実験的研究」, 法政大学工学部研究集報, 第29号 (1993) 129-139.
- 2) 辰野正和: 「クント管内での噴水の形成」, 九州大学応用力学研究所所報, 第128号 (2005), 31-36.
- 3) B. A. Puthenveetil and E. J. Hopfinger: "Evolution and breaking of parametrically forced capillary waves in a circular cylinder", J. Fluid Mech. **633** (2009) 355-379.
- 4) J. Billingham and A. C. King: "*Wave Motion*", Cambridge University Press (2000), 87-91.